Ungelöste Fragen

Gibt es etwas Spannenderes als ungelöste Fragen? Wir wollen solchen künftig an dieser Stelle nachgehen. Dich beschäftigt schon länger eine bislang ungelöste Frage aus Natur- oder Geisteswissenschaft? Dann erkläre hier deine Frage und teile deine Begeisterung mit anderen!

Wie schnell sortiert man Menschenmassen?

Martin Skrodzki

Seit ungefähr 2005 findet man kaum noch eine Zeitung oder ein Magazin ohne sie: Sudokus. Die Zahlenrätsel erfreuen sich großer Beliebtheit, gerade auch im asiatischen Raum, wo es die Schriftzeichen schwierig machen, die hierzulande klassischen Kreuzworträtsel zu lösen. Sudokus sind als Rätsel wissenschaftlich eingehend untersucht worden und können leicht am Computer erzeugt werden. Insbesondere werden sie so generiert, dass sie eindeutig lösbar sind, um Frustration bei den Rätselnden zu vermeiden.

Einen wesentlich älteren Typus von Zahlenrätsel stellen sogenannte „magische Quadrate“ dar. Ein magisches Quadrat der Kantenlänge n ist eine quadratische Anordnung der natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, n^2$, so dass die Summe der Zahlen aller Zeilen, Spalten und der zwei Diagonalen gleich ist. Magische Quadrate faszinieren die Menschheit schon sehr lange. Das älteste Beispiel stammt aus China und wurde ca. 2800 v. Chr. angefertigt. Eines der berühmtesten magischen Quadrate findet sich im Kupferstich „Melencolia I“ von Albrecht Dürer aus dem Jahr 1514, siehe die Reproduktion in Bild 1.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Bild 1

In diesem Artikel soll es nun um ein weiteres Zahlenrätsel gehen, das zunächst ähnlich klingt wie das magische Quadrat. Wir betrachten erneut ein Quadrat der Kantenlänge n. Allerdings stehen uns die Zahlen 1 bis n^2 nun gleich zweimal zur Verfügung: Einmal in kursiv und einmal in fett. An jede Position des Quadrates wird nun nicht eine Zahl geschrieben wie beim magischen Quadrat, sondern ein Paar aus einer kursiven und einer fetten Zahl. Dabei müssen folgende Regeln befolgt werden:

1. In einer Zeile müssen die kursiven Zahlen von links nach rechts größer werden.

2. In einer Spalte müssen die fetten Zahlen von unten nach oben größer werden.

Schnell findet man viele Möglichkeiten, das Quadrat so zu füllen, dass die beiden Regeln erfüllt sind. Das Rätsel ist also bisher ziemlich langweilig. Spannend wird es mit einer dritten Regel:

3. Es darf kein anderes Quadrat mit denselben Paaren aus kursiven und fetten Zahlen geben, das ebenfalls die Regeln 1 und 2 erfüllt.

3,**3**	*4*,**4**
1,**1**	*2*,**2**

1,**1**	*4*,**4**
1,**1**	*3*,**3**

1,**3**	*4*,**4**
2,**2**	*3*,**1**

Bild 2

Ein Quadrat, das alle drei Regeln befolgt, nennen wir eindeutig. Nun wird es schwieriger, Quadrate entsprechend zu füllen. In Bild 2 ist ein Beispiel für ein 2×2 Quadrat gegeben, dessen Paare sich umsortieren lassen und immer noch die beide Regeln 1 und 2 erfüllen. Daneben ebenfalls ein 2×2 Quadrat, das eindeutig ist. Für die fleißigen Leserinnen und Leser hier der Hinweis: Es gibt insgesamt 36 Möglichkeiten, die Zahlen gemäß der Regeln 1 und 2 in das 2×2-Quadrat zu schreiben. Hiervon sind 12 eindeutig.

Für den Fall $n = 3$ explodieren die Anzahlen bereits. Ein einzelnes 3×3-Quadrat mit neun Paaren aus kursiven und fetten Zahlen, das alle drei Regeln erfüllt, lässt sich mit etwas scharfem Überlegen noch hinschreiben. Ein Beispiel gibt Bild 3.

3,**7**	*4*,**8**	*9*,**9**
2,**6**	*5*,**5**	*8*,**4**
1,**1**	*6*,**2**	*7*,**3**

Bild 3

Allerdings gibt es bereits 2 822 400 Quadrate, welche die Regeln 1 und 2 erfüllen. Darunter sind 966 eindeutige. Zugegebenermaßen erfordert das Aufschreiben dieser schon deutlich mehr Fleiß und soll niemandem zugemutet werden. Die hier genannten Zahlen sind daher von Computern überprüft worden.

Aber wie geht es weiter? Bereits für $n = 4$ ist das Problem ungelöst. Ob es überhaupt ein eindeutiges Quadrat gibt, ist nicht klar. Wir wissen lediglich, dass es 3 976 941 969 000 000, also knapp 4 Trillionen Quadrate gibt, welche die Regeln 1 und 2 erfüllen. Wie viele davon eindeutig sind – viel schlimmer noch, ob überhaupt eines davon eindeutig ist – ist unklar. Ähnlich fatal steht es um die allgemeinen Fälle $n \geq 5$.

Wieso ist es nun eine spannende Frage, ob es ein solches eindeutiges Quadrat für jedes n überhaupt gibt? Damit kommen wir zum zweiten Teil des Titels: Zu den Menschenmassen. Für viele Anwendungen in der Architektur, der Sicherheitsforschung oder dem Land- und Städtebau ist es wichtig, das Verhalten von großen Menschenmassen einschätzen zu können. Dies wird in der Regel über eine Computersimulation erledigt. Wird die Zahl der simulierten Menschen sehr groß, sind jedoch selbst Supercomputer schnell überfordert. In dem Paper „A Neighborhood Grid Data Structure for Massive 3D Crowd Simulation on GPU“ (2009) stellen die Autoren rund um Mark Joselli eine Datenstruktur, das Nachbarschaftsgitter, vor, die solche Berechnungen stark beschleunigen soll.

Die Datenstruktur von Joselli betrachtet zunächst jeden Menschen als Punkt mit (x, y)-Koordinaten in der Ebene. Diese Punkte werden nun in ein quadratisches Gitter einsortiert. Dies geschieht genau so, dass die Regeln 1 und 2 von oben erfüllt sind, wobei die x-Koordinaten die Rolle der kursiven und die y-Koordinaten die Rolle der fetten Zahlen übernehmen.

Hat man die Menschen nun in das Gitter einsortiert, lässt sich für einen einzelnen Menschen, nennen wir ihn Martin, sehr schnell herausfinden, welche anderen Menschen in seiner Umgebung sind. Man schaut sich einfach die Kästchen links, rechts, oberhalb und unterhalb des Kästchens an, in das Martin sortiert wurde. Da sich Martin ungefähr so bewegt, wie die Menschen in seiner Umgebung, kann man damit nun sein Verhalten simulieren.

In praktischen Anwendungen funktioniert das Gitter sehr gut. Aber als Mathematiker fragt man sich nun: Wie gut funktioniert das Gitter denn genau? Die entscheidende Fragestellung lautet: Wie lange brauchen wir, um die Menschen in das Gitter einzusortieren? Wobei wir auch das nochmals aufteilen können: Wie lange brauchen wir bestenfalls/schlimmstenfalls, um die Menschen in das Gitter einzusortieren?

Der schlimmste Fall lässt sich mit einem Satz aus der Informatik erschlagen, der über das Sortieren von Daten sagt: Um n Daten zu sortieren, benötigt man höchstens $O(n \cdot \log(n))$ Schritte. Für 100 Menschen also ungefähr 664 Schritte, für 1000 Menschen 9966 Schritte, usw. Eigentlich sagt derselbe Satz auch aus, dass diese Schritt-Grenze auch im besten Fall gilt. Leider setzt der Satz aber voraus, dass die Sortierung der Daten eindeutig ist. Und wie wir in Bild 2 gesehen haben, ist das bei uns nicht der Fall. Darum die Regel 3: Wenn wir für jedes n mindestens ein in diesem Sinne eindeutiges Quadrat finden, könnten wir den obigen Satz anwenden und direkt folgern, dass unsere Sortierung im besten wie im schlechtesten Fall den gleichen Aufwand benötigt. Das wäre dann optimal. Und was gäbe es denn Schöneres?

Aber es ist weiterhin unklar, ob es für jedes n ein eindeutiges Quadrat gibt. Habt ihr Ideen, wie man das Problem lösen kann oder wollt ihr mehr dazu wissen? Für Fragen und Anregungen bin ich offen: martin.skrodzki[at]fu-berlin.de.