Martin Skrodzki

**Von Paradoxien, Unvollständigkeiten und Computerbeweisen:
Staunen in der Mathematik**

Die Mathematik bewegt sich schon wissenschaftshistorisch gesehen zwischen Natur und Kultur. Dies hat zwei Gründe: Zum einen sind mathematische Erkenntnisse zu Anfang meist von Fragen und Problemstellungen im natürlichen und alltäglichen Kontext inspiriert. Die Geometrie war, etwa im alten Ägypten, ganz buchstäblich Hilfsmittel zur Abmessung der Felder, als diese nach der Nilschwemme neu einzuteilen waren. Im antiken Griechenland etablierte sich erstmals eine strenge Form des rein mathematischen Beweises. Kannten auch schon die alten Ägypter das pythagoreische Zahlentripel $3, 4, 5$ zur Abmessung eines rechtwinkligen Quadrats, so konnten die Griechen dies *beweisen*. Es entstand in Form einer definierten, mathematischen Nomenklatur ein Übergang zu einer kulturellen Form reiner mathematischer Semantik: Die Diagonale eines Quadrates mit Seitenlänge 1 hat selbst die Länge $\sqrt{2}$, welche keine natürliche oder rationale Zahl mehr ist.[1] Ausgehend von natürlichen Anschauungen transzendieren die mathematischen Erkenntnisse auf diese Weise selbige. Es entsteht ein abstraktes, rein mathematisches System aus Grundannahmen und Schlussregeln,[2] das über die ursprünglichen, natürlichen Grundlagen hinausgeht.

Zum anderen findet eine Rückkopplung statt: Mathematische Theorien treten aus den definierten Systemen heraus und treffen Vorhersagen für natürliche Prozesse. Auf Grundlage der Theorien der Quantenphysik konnte beispielsweise die Existenz des Higgs-Bosons postuliert werden. Diese Herleitung inspirierte weitere physikalische Experimente, bei denen das entsprechende Teilchen tatsächlich nachgewiesen werden konnte. Auch finden zunächst rein mathematisch-intrinsisch entwickelte Strukturen Anwendungen in außermathematischen Verfahren. Beispielsweise konnte ein Teilbereich der Zahlentheorie, von dem Godfrey Harold Hardy noch überzeugt war, dass dieser niemals Anwendungen finden werde,[3] für Verschlüsselungsverfahren verwendet werden.

Ein fundamentaler Unterschied zwischen der Mathematik und den (anderen) Naturwissenschaften ist der Prozess des Beweisens.[4] Während in auf Experimenten basierten

[1] Die Frage des Übergangs von rationalen zu reellen Zahlen führte zu einem Konflikt in der Pythagoreischen Schule. Der Grundsatz „Alles ist Zahl“ musste aufgegeben werden. Vgl. Hasse, Helmut/Scholz, Heinrich, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg, 1928; von Fritz, Kurt, „The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum“, in: *The Annals of Mathematics*, 46/2 (1945), S. 242–264.

[2] Siehe auch Anm. 6 und Anm. 7.

[3] „I have never done anything ‚useful‘. No discovery of mine has made […] the least difference to the amenity of the world.“ (Hardy, Godfrey Harold, *A Mathematician’s Apology*, Cambridge, 1940, S. 90).

[4] Vgl. zum Beweisen in der Mathematik Heintz, Bettina, *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Wien, 2000.

Disziplinen eine postulierte Aussage lediglich falsifiziert werden kann[5] und jedes Scheitern einer Falsifikation als Stärkung der Aussage angesehen wird,[6] sucht die Mathematik nach allgemeingültigen Aussagen, die unter den gleichen Annahmen nicht widerlegt werden können. Basierend auf einer festgelegten Menge von grundlegenden Annahmen[7] und Schlussregeln[8] wird ein Theorem $\forall x: p(x) \Rightarrow q(x)$ – lies: „Für alle x gilt: Wenn p von x gilt, dann gilt auch q von x" – gezeigt. Ist diese Herleitung erbracht, so gilt sie in allen Systemen, welche die gleichen Annahmen und Schlussregeln besitzen.[9] So ist die Aussage aus den *Elementen* des Euklid[10] über die unendliche Anzahl von Primzahlen heute genauso gültig wie zur Zeit ihrer Niederschrift. Ein Beweis hat dabei immer ein kreatives Moment, dessen Entstehungsprozess meist völlig verborgen bleibt.[11] Dieses Moment macht den Unterschied zwischen Aussagen wie $2 + 2 = 4$ und $a^2 + b^2 = c^2$ aus. Theoreme schaffen Brücken zwischen Fakten oder gar Gebieten der Mathematik, deren Zusammenhänge bis dahin ungeklärt waren. Es werden keine offensichtlichen Verbindungen herausgearbeitet, sondern neue Strukturen offengelegt. Diese ermöglichen ihrerseits Fortschritte in der Mathematik. So birgt die Aussage $2 + 2 = 4$ keine neue Erkenntnis, während die Gesetzmäßigkeit $a^2 + b^2 = c^2$ einen Zusammenhang zwischen Geometrie und Algebra herstellt. Das Erkennen von einem kreativen Moment eines Beweises ist Teil des mathematischen Studiums. Naturgemäß verschiebt sich mit zunehmender Erfahrung eines Mathematikers seine Wahrnehmung von Kreativität und Leistung.[12] Ebenso lässt sich Kreativität ob der dem Begriff inhärenten

---

[5] Vgl. Popper, Karl, *The Logic of Scientific Discovery*, New York, Hagerstown, San Francisco, London, 1968, S. 47.

[6] Vgl. § 20 „Methodological Rules", in: Popper 1968, S. 81–84.

[7] Im Folgenden werden diese Annahmen als allgemeines System von Axiomen aufgefasst. Insbesondere wird hier kein spezielles System für eine bestimmte Theorie angenommen, sondern Axiomatik im Allgemeinen betrachtet. Vgl. auch §16: „Theoretical Systems" und §17: „Some Possibilities of Interpreting a System of Axioms" in: Popper 1968, S. 71–75.

[8] Viele logische Kalküle, wie die Hilbert-Kalküle, bauen auf Modus Ponens als einziger Schlussregel auf. Vgl. Rautenberger, Wolfgang, *Einführung in die Mathematische Logik. Ein Lehrbuch*, Wiesbaden, 2008, S. 29–32.

[9] „This difficult science [mathematics; M.S.] is formed slowly, but it preserves every principle which it has once acquired. It grows and strengthens itself incessantly in the midst of the many variations and errors of the human mind." (Fourier, Joseph, *The Analytical Theory of Heat*, Cambridge, 1878, S. 7–8).

[10] Siehe Euklid, *Die Elemente*, hg. v. Clemens Thaer, Darmstadt, 1962, S. 204–205.

[11] Vgl. hierzu die Ausführungen im Vorwort von *Mathematicians on Creativity*, hg. v. Peter Borwein, Peter Liljedahl u. Helen Zhai, Washington, 2014, S. XI–XVI.

[12] Dieses Phänomen ist allgemein als „Expert's Dillemma" bekannt. Vgl. hierzu die Aussage von Yakov Sinai: „Recently I needed one of my first papers, I was surprised when I recalled how much time I spent on it. Later it looked so simple." (Borwein 2014, S. 122); Vgl. auch die Anekdote Richard Bellmans: „[Lefschetz and Einstein] had a running debate for many years. Lefschetz insisted that there was difficult mathematics. Einstein said that there was no difficult mathematics, only stupid mathematicians." (Bellmann, Richard, *Eye of the Hurricane: An Autobiography*, Hackensack, 1984, S. 130).

Unschärfe nicht quantitativ festlegen.[13] Sie spielt jedoch eine wichtige Rolle bei der Beschreibung des Staunens über Beweise.

Das Staunen lässt sich in der Mathematik auf mehreren Achsen verorten. Zum Ersten in Bezug auf einzelne Aussagen und ihre Platzierung im Spektrum zwischen Gültigkeit, Ungültigkeit und Unentscheidbarkeit. Hier erwächst ein eher subjektbetontes Staunen v.a. aus dem Nichtwissen um die Einordnung der Aussage. Zum Zweiten wohnt das Staunen auf unterschiedlichen Ebenen mathematischen Beweisen inne. Hier ist es objektbetont. Das kreative Element eines Beweises und im Beweis dargelegte Zusammenhang bilden die Gegenstände des Staunens. Zum Dritten haben mathematische Beweise immer ein Kippmoment in Bezug auf das Staunen. Ist der Leser unwissend, wenn er anfängt, den Beweis einer komplexen Aussage zu lesen, so beendet er die Lektüre wissend: Die Aussage ist in ihrer Komplexität deutlich reduziert.

Die damit benannten, unterschiedlichen Aspekte des Staunens werden im Folgenden anhand mehrerer konkreter Beispiele aus der Mathematik veranschaulicht. Echte und falsche Paradoxien exemplifizieren den Prozess des Staunens trotz der fehlenden Verortung von Gültigkeit und der Funktion von Beweisen als Kippmoment. Das Hilbertprogramm zieht die komplette Elimination des Staunens aus der Mathematik nach sich. Sein Scheitern eröffnet im Gegenzug einen Raum für das Staunen. Die Problematik der Unentscheidbarkeit mathematischer Aussagen und das entsprechende Potenzial des Staunens werden mit Beispielen zu den Gödel'schen Unvollständigkeitssätzen erläutert. Schließlich bindet der Einsatz von Computern in moderner Mathematik die Disziplin in neuem Maße an technische und kulturelle Entwicklungen. Die damit einhergehende Renaissance des Hilbertprogramms und die abermalige Elimination des Staunens bilden den Abschluss der Betrachtungen.

I. Echte und falsche Paradoxien

Im Feld der Mathematik werden alle Aussagen streng aus den Axiomen hergeleitet. Entstehen hierbei paradoxe Aussagen, lässt dies zwei mögliche Schlüsse zu: Entweder sind die Axiome in sich widersprüchlich oder die Schlussregeln wurden fehlerhaft angewendet. Das wohl bekannteste Paradoxon der Mathematik ist das Barbierparadoxon von Bertrand Russell. Mit dieser Aussage zeigt Russell, dass eine von der Cantor'schen Mengenlehre postulierte Menge nicht existiert und damit die Theorie der Mengenlehre inkonsistent ist. Diese Inkonsistenz schafft wiederum Raum für das Staunen. Das Paradoxon lautet: „You can define the barber as 'one who shaves all those, and those only, who do not shave themselves.' The question is:

[13] Vgl. hierzu allgemein Hadamard, Jacques, *The Mathematician's Mind. The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, 1945; Borwein 2014.

does the barber shave himself?“[14] Die Frage lässt sich nicht beantworten. Beide Fälle, derjenige, in welchem sich der Barbier rasiert, und derjenige, in welchem er sich nicht rasiert, erzeugen einen Widerspruch zur Definition eines Barbiers. Nimmt man das *tertium non datur*[15] an, so führt die Frage in Bezug auf die Definition zu einer Paradoxie. Bertrand Russell fährt fort: „In this form the contradiction is not very difficult to solve.“[16] Russell legt dar, dass sich aus obiger Definition eines Barbiers folgende Aussage direkt herleiten lässt: „Es gibt kein x, sodass für alle y gilt: x rasiert y“.[17] Die Definition eines Barbiers in der obigen Form besagt also, dass es kein Objekt gibt, welches die Definition eines Barbiers erfüllt. In der alltäglichen Anschauung lässt sich akzeptieren, dass es kein solches Objekt gibt.[18] Es handelt sich also in dieser Form um kein Paradoxon im eigentlichen Sinne. Zu einem solchen wird es erst, wenn der Begriff „Barbier“ durch „Menge“ und „rasieren“ durch „enthalten“ ersetzt wird. Nun lässt sich die Frage stellen: Enthält eine Menge, die alle sich nicht selbst enthaltenden Mengen enthält, sich selbst? Die Existenz einer solchen Menge folgt direkt aus der Definition Georg Cantors:

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.[19]

Russells Herleitung der Nicht-Existenz einer spezifischen Menge steht im Widerspruch zu dieser Definition. Das Staunen folgt nun als Spannungsfeld zwischen praktischer Erfahrung

---

[14] Russell, Bertrand, „The Philosophy of Logical Atomism [1918]“, in: *The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays 1914–19* (The Collected Papers of Bertrand Russell 8), hg. v. John Slater, London, 1986, S. 157–244, hier: S. 228.

[15] Der Ausdruck wird häufig referenziert als „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“. Vgl. Rautenberg, 2008, S. 51. Im vorliegenden Aufsatz wird an diesem Prinzip unter Vernachlässigung des Intuitionismus und Konstruktivismus festgehalten. Zur Relevanz dieses Prinzips in der Mathematik vgl. Hilbert: „Dieses Tertium non datur dem Mathematiker zu nehmen, wäre etwa, wie wenn man dem Astronomen das Fernrohr oder dem Boxer den Gebrauch der Fäuste untersagen wollte.“ (Hilbert, David, „Die Grundlagen der Mathematik“, in: *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 6 (1928), S. 65–85, hier: S. 80).

[16] Russell 1986, S. 228.

[17] Sei xRy die Relation für x rasiert y. Dann gilt die Definition des Barbiers Byx: $xRy \Leftrightarrow \neg yRy$. Die Betrachtung eines konkreten Barbiers a führt zum Widerspruch, darum gilt $\neg Baa$. Da a nun als Zeuge für die Aussage fungiert, kann der Existenzquantor eingeführt werden: $\exists y{:}\,\neg Bya$. Weiter ist die Variable a in dieser Formulierung frei, kann also durch einen Allquantor gebunden werden: $\forall x{:}\,\exists y{:}\,\neg Byx$. Dies ist äquivalent zu $\forall x{:}\,\neg\forall y{:}\,Byx$, bzw. $\neg\exists x{:}\,\forall y{:}\,Byx$. Es existiert also kein x, welches die Definition des Barbiers erfüllt.

[18] Streng genommen existiert hier noch eine semantische Unschärfe im Ausdruck „rasiert sich nicht selbst“. Für einen stringenten Beweis müsste hier ein aktuales und ein prinzipielles Nicht-Rasieren unterschieden werden. Diese Unschärfe entstammt der zeitlichen Komponente des Rasierens: Der Barbier stellt im Spiegel fest, dass er sich nicht rasiert, beginnt dann damit und widerspricht streng genommen erst in *diesem* Moment seiner eigenen Definition. In der mengentheoretischen Übertragung fällt diese zeitliche Komponente weg und macht damit das anschauliche Bild zu einem echten Paradoxon.

[19] Cantor, Georg, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre“, in: *Mathematische Annalen*, 49/2 (1897), S. 207–246, hier: S. 207.

und nüchterner Herleitung in der Mathematik, mit anderen Worten als Diskrepanz zwischen Natur und Kultur. In der Mathematik haben sich – wissenschaftshistorisch betrachtet – viele Fortschritte aus der Mengenlehre ergeben. Diese ließen David Hilbert die Mengenlehre als „Paradies"[20] bezeichnen. Die praktische Wahrnehmung sowie das tägliche Arbeiten qualifizieren die Mengenlehre als hilfreiches Werkzeug für die Mathematik. Jedoch lässt sie sich ob des Russellschen Paradoxons nicht in die kulturelle und technische Struktur einfügen. Vor diesem Gegensatz stand die Mathematik an der Wende zum 20. Jh. In seiner Ambivalenz öffnet das Paradoxon Raum für das Staunen. Aus diesem entstand in den darauffolgenden Jahren die moderne Logik mit dem Bestreben, den Fehler der Mengenlehre zu korrigieren und diese wieder als konsistente Theorie für die Mathematik nutzbar zu machen.

Während Russells Paradoxon in seiner mengentheoretischen Formulierung ein echtes Paradoxon darstellt, treten in der Mathematik auch *scheinbare* Paradoxa auf. Ein solches ist durch das sogenannte Geburtstagsparadoxon gegeben. Es gilt hier, die folgende Frage zu beantworten: Wie viele Personen müssen sich mindestens in einem Raum befinden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Personen am gleichen Tag im Jahr Geburtstag haben, bei mindestens 50% liegt? Intuitiv antwortet man: 183, also die aufgerundete Hälfte der 365 Tage im Jahr. Dies ist jedoch falsch, weil die korrekte Anzahl weitaus niedriger ausfällt. Dies hat den folgenden Grund: Hat man eine erste Person im Raum, so kann diese an einem beliebigen Tag im Jahr Geburtstag haben, z.B. am 1. Januar, ohne dass es zu einem doppelten Geburtstag kommt. Kommt nun eine zweite Person dazu, bleiben nur noch die Tage vom 2. Januar zum 31. Dezember übrig, beispielsweise der 2. Januar – für die dritte Person der 3. Januar usw. Die Wahrscheinlichkeit $G(n)$, dass es zu keinem doppelten Geburtstag kommt, liegt für n Personen bei

$$G(n) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365},$$

wobei sich die Gegenwahrscheinlichkeit von mindestens einem gedoppelten Geburtstag als $1 - G(n)$ berechnet. Löst man nun $1 - G(n) = \frac{50}{100}$ nach n auf, so erhält man die unerwartet niedrige Anzahl von 23, welche weit entfernt von der intuitiv geschätzten Anzahl von 183 Personen liegt.

Das Geburtstagsparadoxon ist somit kein Paradoxon im eigentlichen Sinne. Es handelt sich um eine mathematisch beweisbare Aussage, die lediglich beim ersten Betrachten paradox zur Intuition erscheint. Ist die Aussage durchschaut und gar ein Beweis gegeben, verliert sie ihre

[20] „Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können." (Hilbert, David, „Über das Unendliche", in: *Mathematische Annalen*, 95 (1926), S. 161–190, hier: S. 170).

Widersprüchlichkeit. Hier tritt nun der Aspekt der Demontage von Staunen durch die Mathematik zutage. Der Mathematiker ist mit dem Geburtstagsparadoxon konfrontiert. Es klingt paradox, denn die Intuition steht im Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Im Rahmen dieser Diskrepanz zwischen intuitivem Verständnis und wissenschaftlichem Faktum stellt sich das Staunen ein. Dann jedoch wird die Aussage weiter untersucht, bis sie schließlich bewiesen wird. Der Mathematiker versteht, warum sie gilt, und alle Diskrepanz und Spannung fällt von der ursprünglichen Betrachtung ab. Nach dem Lösen des Problems erscheint es nicht mehr paradox. Persi Diaconis, Mathematiker und Magier, vergleicht die Mathematik mit Magie. Den Beweis für ein mathematisches Theorem zu lesen, kommt für ihn der Erklärung eines magischen Tricks gleich. Beides verliert danach seine Faszination.[21] Ebenso geschieht es mit dem Staunen. Solange eine spezifische Gesetzmäßigkeit zumindest teilweise verborgen ist und ihre internen Strukturen nicht offenbar sind, lässt dies dem Staunen Raum. Sobald aber alle Zusammenhänge offenliegen, löst sich das Staunen auf.

II. Das Hilbertprogramm und seine Destruktion

Die vollkommene Demontage des Staunens durch die Mathematik wird in dem nach David Hilbert benannten Forschungsprogramm gefordert.[22] In diesem Programm kommt zunächst ein Fortschrittsglaube zum Ausdruck, wie er auch in anderen Wissenschaften zu Beginn des 20. Jh. vorherrschend und entsprechend auch in der Mathematik präsent war. George David Birkhoff konstatiert: „When he [the mathematician; M.S.] recalls that in the past the most difficult mathematical questions have been ultimately answered, he is inclined to believe with the great German mathematician, Hilbert, that every mathematical fact is provable.“[23] Hilbert formuliert dies mehr als eindeutig: „Wir müssen wissen, wir werden wissen.“[24] Außerdem betont das Hilbertprogramm den Status der Mathematik als Wissenschaft der absoluten Gewissheit,[25] denn ein ähnliches Programm wäre in keiner anderen Wissenschaft denkbar. Sein Ziel ist kein geringeres als der Beweis der Konsistenz der gesamten Mathematik. Von

[21] Vgl. Diaconis, Perci, zit. nach: *Mathematical People. Profiles and Interviews*, hg. v. Donald J. Albers u. Gerald L. Alexanderson, 2. Aufl., Wellesley, 2008, S. 71.

[22] Für eine ausführliche Diskussion des Hilbertprogramms vgl. Tapp, Christian, *An den Grenzen des Endlichen. Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus*, Berlin u. Heidelberg, 2013.

[23] Birkhoff, David George, „Intuition, Reason and Faith in Science [1938]“, in: *Musings of the Masters. An Anthology of Mathematical Reflections*, hg. v. Raymond Ayoub, Washington D.C., 2004, S. 98–114, hier: S. 103.

[24] David Hilbert bezieht sich hier auf eine Aussage von Emil Heinrich du Bois-Reymond, vgl. du Bois-Reymond, Emil Heinrich, *Über die Grenzen des Naturerkennens. Die sieben Welträthsel*, Leipzig, 1872, S. 33. Für den Ausspruch Hilberts siehe Hilbert, David, „Naturerkennen und Logik“, in: *Die Naturwissenschaften*, 18 (1930), S. 959–963, hier: S. 963.

[25] Vgl. die Aussage von Cassius Jackson Keyser: „The domain of mathematics is the sole domain of certainty.“ (Jackson Keyser, Cassius, „The Universe and Beyond“, in: *Hibbert Journal*, 3 (1904/1905), S. 300–314, hier: S. 313–314).

den Axiomen der Mengenlehre[26] ausgehend werden zwei Ziele verfolgt: Zum einen soll gezeigt werden, dass diese Axiome ein widerspruchsfreies System bilden. Das heißt, aus den Axiomen können zu keinem Zeitpunkt eine Aussage $p(x)$ und ihre Negation $\neg p(x)$ hergeleitet werden. Zum anderen soll das Feld der Mathematik im Rahmen des Programms komplettiert werden – es soll die Vollständigkeit des Systems bewiesen werden. Dies bedeutet, dass jede Aussage $p(x)$, die wahr ist, auch innerhalb des Systems hergeleitet werden kann.

Für das Staunen folgt daraus, dass die Mathematik zu einem komplett vom Staunen befreiten Raum wird. Das Gebiet der Mathematik wird von den grundlegenden Axiomen aus aufgebaut, wobei alle Unsicherheiten eliminiert werden. Das Spannungsfeld zwischen Wissen und Unwissen wird aufgehoben, da alle Resultate prinzipiell bekannt sind. Die Beweise liegen zwar noch nicht vor, aber für jedes Resultat existiert eine genaue Anleitung von zu befolgenden Schritten, wie das Resultat zu erreichen ist. Jegliche Herleitung verkommt von einem vormals kreativen und komplexen Prozess – dem Finden der Anleitung – zur Abfolge trivialer Schlussregeln.[27] Es genügt nun das stumpfe Anwenden von endlich vielen Schlussregeln, ohne dass neue, kreative Strukturen oder Konzepte nötig würden. Mit der Durchführung des Hilbertprogramms wäre alles Staunen aus der Mathematik eliminiert.

Bereits wenige Jahre nach seiner Formulierung wurden dem Hilbertprogramm zwei schwere Schläge versetzt, die seine Durchführung unmöglich machten. Sie erfolgten in Form der Unvollständigkeitssätze von Kurt Gödel und der Unlösbarkeit des Halteproblems, wie von Alan Turing gezeigt.

In seinen Unvollständigkeitssätzen zeigte Kurt Gödel, dass jedes System, welches in einem bestimmten Sinne stark genug[28] ist, Aussagen besitzt, die innerhalb des Systems zwar korrekt sind, aber nicht bewiesen werden können. Insbesondere folgt daraus, dass jedes

[26] Dies sind nun nicht mehr die Axiome der naiven Mengenlehre, wie sie von Russell mit seiner Antinomie (vgl. Abschnitt „Paradoxien“), kritisiert wurden, sondern die Axiome des Systems ZFC. Das System besteht aus acht Axiomen oder Schemata: Extensionalitätsaxiom, Aussonderungsschema, Vereinigungsaxiom, Potenzmengenaxiom, Ersetzungsschema, Unendlichkeitsaxiom, Fundierungsaxiom und dem Auswahlaxiom. Damit sind die entstehenden Mengen von wesentlich reichhaltiger Struktur als die Mengen, welche aus Cantors Definition folgen. Vgl. oben die Definition von Mengen nach Cantor. Vgl. in Bezug auf ZFC auch Rautenberg 2008, S. 88–91.

[27] Vgl. die Aussage von Hermann Weyl: „We are not very pleased when we are forced to accept a mathematical truth by virtue of a complicated chain of formal conclusions and computations, which we traverse blindly, link by link, feeling our way by touch. We want first an overview of the aim and of the road; we want to understand the idea of the proof, the deeper context.“ (Weyl, Hermann, „Part II. Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension“, in: *The American Mathematical Monthly*, 102/7 (1995), S. 646–651, hier: S. 646).

[28] Für eine genaue Definition der Voraussetzungen, siehe Franzén, Torkel, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Natick, MA, 2005, S. 22–24; vgl. allgemeiner Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach – ein endlos geflochtenes Band*, 4. Aufl., München, 1995.

mathematische System, welches elementare Arithmetik[29] zulässt, im Sinne Gödels als unvollständig gilt. Anschaulich liegt das Problem in einer spezifischen Selbstbezüglichkeit begründet. Betrachtet man z.B. die Aussage „Dieser Satz ist falsch“, so ist diese für sich genommen entweder wahr oder falsch.[30] Angenommen, die Aussage ist korrekt, so klassifiziert sie sich selbst als falsch. Dies ist ein Widerspruch. Ist die Aussage im Gegenteil falsch, so gilt wiederum ihre Negation, d.h., sie muss korrekt sein. Auch dies führt zu einem Widerspruch.[31] Gödel gelang es nun, dieses Prinzip der Selbstbezüglichkeit auf das gesamte System, wie im Hilbertprogramm untersucht, anzuwenden und damit zu zeigen, dass dieses System niemals vollständig sein kann.[32] Weiter zeigte Gödel, dass es dem System selbst immer unmöglich sein wird, seine eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen.[33]

Ähnliche Ergebnisse erreichte Alan Turing bei der Betrachtung des sogenannten Halteproblems. Hierbei soll durch Betrachtung des Quellcodes eines Programms P festgestellt werden, ob dieses Programm P nach endlicher Zeit anhält oder endlos rechnet. Turing konnte mit folgendem Gedankenexperiment zeigen, dass es kein Programm $Halt()$ geben kann, welches das Halteproblem für alle Programme löst. Hierbei bediente sich Turing eines ähnlichen ‚Tricks‘ wie Gödel, indem er ein hypothetisches Programm auf sich selbst anwandte. Konkret nahm er an, es gebe ein Programm $Halt()$, das für jedes andere Programm P berechnet, ob P nach endlicher Zeit anhält, d.h. $Halt(P) = w$, oder nicht, $Halt(P) = f$. Um zu zeigen, dass $Halt()$ nicht existieren kann, konstruierte Turing ein neues Programm Q. Dieses Programm Q ruft zunächst $Halt(Q)$ auf. Wenn die Ausgabe w ist, so lässt Turing das neue Programm Q unendlich lang weiterlaufen. Ist die Ausgabe f, so hält Q an. Das Programm Q nutzt also die Ausgabe von $Halt(Q)$, um genau das Gegenteil von dem zu tun, was $Halt()$ erwartet. Damit kann $Halt()$ nicht entscheiden, ob Q hält oder nicht, was jedoch angenommen war. Somit ist bewiesen, dass es erstens kein solches Programm $Halt()$ geben kann und dass zweitens wohldefinierte mathematische Eigenschaften existieren, die nicht berechnet werden können.

Diese beiden Resultate bedeuten die Undurchführbarkeit des Hilbertprogramms. Zum einen zeigen die Unvollständigkeitssätze von Gödel, dass die Widerspruchsfreiheit der Mathematik

[29] Dies ist bereits mit elementarer Mengenlehre nach ZFC möglich, vgl. Anm. 26 sowie Franzén 2006, S. 22–24.

[30] Eine dritte Möglichkeit gibt es nicht, vgl. Anm. 15.

[31] Vgl. die entsprechenden Darstellungen in Hofstadter 1995, S. 530–595.

[32] Konkret gelingt dies mit dem Verfahren der Gödelisierung, bei welchem jedem Ausdruck einer formalen Sprache eine natürliche Zahl, die sogenannte Gödelnummer, eindeutig zugeordnet wird. Nun entsprechen arithmetische Operationen auf diesen Gödelnummern Operationen auf den Ausdrücken der formalen Sprache. Gödel zeigt nun, dass es einen Satz mit Nummer n gibt, welcher besagt: „Der Satz mit Nummer n ist nicht ableitbar.“ Vergleiche hierzu Franzén 2005 S. 35, 49, 66 u. Hofstadter 1995, S. 282, 457.

[33] Für eine genaue Darstellung der Gödelschen (Un-)Vollständigkeitssätze und Arten, diese (falsch) zu interpretieren, siehe allgemein Franzén 2005.

nicht innerhalb ihres eigenen Systems bewiesen werden kann. Zum anderen zeigen die Resultate von Turing, dass nicht alle formal definierbaren Größen berechnet werden können. Damit scheitern die beiden Punkte der Widerspruchsfreiheit und der Vollständigkeit, wie sie im Hilbertprogramm gefordert wurden. Ebenfalls scheitert die Elimination des Staunens aus der Mathematik. Viel mehr eröffnen insbesondere die Resultate von Gödel sogar neue Möglichkeiten des Staunens: Eine mathematisch korrekte Aussage kann unbeweisbar bleiben. Der Fortschrittsglaube, wie er noch von Hilbert ungebrochen vertreten wurde, muss demnach aufgegeben oder zumindest modifiziert werden. Es wird Teile im Gebäude der Mathematik geben, die nie aus den zugrundeliegenden Axiomen hergeleitet werden können. Insgesamt muss das Selbstverständnis der Mathematik als „Königin der Wissenschaften“[34] gewandelt werden. In diesem neuen Spielraum hat das Staunen seinen Platz.

III. Nach Gödel: Staunen über die Undurchführbarkeit

Für die Arbeit der Mathematiker ist in Bezug auf die Gödel’schen Unvollständigkeitssätze bezeichnend, dass Gödel nicht angeben konnte, welche Theoreme nicht beweisbar sind. Potentiell könnte jedes offene Problem gemäß den Unvollständigkeitssätzen unlösbar sein. Das Staunen setzt hier in zweierlei Formen ein: zum einen, sobald ein schwieriges Problem gelöst wird, zum anderen in der Frage, ob ein offenes Problem überhaupt lösbar ist.

Die erste Form des Staunens wird besonders gut in den Abläufen rund um den Beweis der nach Pierre de Fermat benannten Vermutung deutlich. Die Fermat’sche Vermutung besagt, dass es für eine natürliche Zahl $n \geq 3$ keine natürlichen Zahlen x, y, z gibt, sodass $x^n + y^n = z^n$ gilt. Für $n = 2$ gibt es unendlich viele solcher Tripel (x, y, z), sie heißen dann pythagoreische Tripel.[35] Die Vermutung wurde in Fermats Nachlass als Randnotiz in der *Arithmetica* des Diophant mit der Bemerkung gefunden: „Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“[36] Über mehrere Jahrhunderte

[34] Überliefert in Waltershausen, Wolfgang Sartorius von, *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856, S. 79.

[35] Eine umfassende Beschreibung der Fermatschen Vermutung sowie ihrer Lösung findet sich in Singh, Simon, *Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*, München, 2011. Zu den Pythagoräischen Triplen vgl. unten im Abschnitt „Renaissance des Hilbert-Programms“ die Ausführungen zum Pythagorean Triple Theorem.

[36] Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat*, Bd. 1, hg. v. Paul Tannery u. Henry Charles, Paris, 1891, S. 291, zit. nach: Diophant, *Diophanti Alexandrini arithmeticorum*, Bd. 2, hg. u. übers. v. Samuel de Fermat, Toulouse, 1670, S. 61. Für eine deutsche Übersetzung siehe Fermat, Pierre de, *Bemerkungen zu Diophant*, aus dem Lateinischen übers. u. hg. v. Max Miller, Leipzig, 1932, S. 3.: „Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

wurden Spezialfälle der Vermutung gelöst, als Ganzes blieb sie jedoch offen. Als Andrew Wiles im Jahr 1993 einen Beweis zur Fermatschen Vermutung vorstellte, war nicht nur die Fachwelt erstaunt. Wiles hatte jahrelang in Verschwiegenheit an seinem Beweis gearbeitet und nur wenige ausgewählte Kollegen eingeweiht. Als kurz nach der Präsentation seines Beweises ein Fehler entdeckt wurde, schrieben viele Mathematiker das Problem als unlösbar ab. Es gelang Wiles jedoch, den Fehler zu beheben und damit die für mehrere Jahrhunderte offene Fermatsche Vermutung zu beweisen.

Es gibt ähnliche, schwierige Probleme in der Mathematik, die bereits lange offen sind. Die bekannteste Sammlung bilden die Hilbertprobleme von 1900. Sie umfassen eine Liste von 23 damals ungelösten Problemen der Mathematik.[37] Den prominentesten Punkt dieser Liste stellt die Riemannsche Vermutung dar.[38] Sie sagt die Lage von Nullstellen der komplexen Zetafunktion voraus. Obwohl es sich um eine Vermutung handelt, wurden bereits viele Arbeiten unter der Annahme veröffentlicht, dass die Vermutung korrekt ist. Sollte sie eines Tages widerlegt werden, müssen entsprechend große Teilgebiete der Mathematik neu durchdacht werden. Trotz großer Anstrengungen, einen Beweis zu finden, konnte die Riemannsche Vermutung im 20. Jh. nicht bewiesen werden. Als die Hilbertprobleme zur Jahrtausendwende als Millenniumsprobleme[39] neu aufgelegt wurden, fand sich die Riemannsche Vermutung daher erneut darunter. Bei der Riemannschen Vermutung könnte es sich um solch eine Aussage handeln, deren Existenz Gödel gezeigt hat: eine Aussage, die gilt, aber nicht beweisbar ist.[40]

Zwei weitere solcher – möglicherweise nicht-beweisbaren, aber korrekten – Aussagen sind die Vermutungen von Christian Goldbach und Lothar Collatz.[41] Die Goldbachsche Vermutung besagt, dass jede gerade natürliche Zahl $n \geq 4$ als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist. Für kleine Zahlen lässt sich die Vermutung schnell verifizieren, denn es gilt beispielsweise $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$. Die Vermutung ist von einer bestechenden

[37] Die Probleme wurden von Hilbert auf dem zweiten internationalen Mathematiker-Kongress 1900 in Paris aufgelistet. Das Lösen dieser speziellen Auswahl sollte, nach Meinung Hilberts, die Mathematik in ihrem Fortschritt beschleunigen. Während einige der Probleme gelöst werden konnten, wurden andere in die Sammlung der Milleniumsprobleme (vgl. Anm. 39) übernommen. Vgl. hierzu Pickover, Clifford A., *Das Mathebuch. Von Pythagoras bis in die 57. Dimension. 250 Meilensteine in der Geschichte der Mathematik*, Kerkdriel, 2013, S. 298.

[38] Für eine ausführliche Einführung zur Riemannschen Vermutung siehe Derbyshire, John, *Prime Obsession. Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Washington, 2003.

[39] Die Milleniumsprobleme sind eine Neuauflage der klassischen Hilbertprobleme von 1900 (vgl. Anm. 37). Sie umfassen sieben Probleme, für deren Lösung das Clay Institute of Mathematics jeweils eine Million Dollar Preisgeld ausgeschrieben hat. Zwei der Probleme waren bereits in der Auflistung Hilberts enthalten. Vgl. hierzu Wußing, Hans, *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise*, Bd. 2, Berlin, 2009, S. 581–583.

[40] du Sautoy, Marcus, *Die Musik der Primzahlen. Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik*, München, 2006, S. 316.

[41] Die These, dass die Goldbachsche Vermutung unentscheidbar ist, wird beispielsweise in folgendem Roman diskutiert: Doxiadis, Apostolos, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, London, 2001.

Einfachheit, denn sobald das Konzept von Primzahlen bekannt ist, lässt sich auch die Goldbachsche Vermutung erklären.

Die Collatzsche Vermutung ist ähnlich einfach gelagert: Man beginnt mit einer natürlichen Zahl n. Ist die Zahl gerade, so teilt man sie durch 2. Ist sie ungerade, so bildet man die Zahl $3n + 1$. Auf das Ergebnis wendet man wiederum die passende der beiden Regeln an. Die Vermutung besagt nun, dass unabhängig von der zuerst gewählten Zahl n in der Folge der erzeugten Zahlen immer die Zahl 1 auftaucht. Startet man z.B. mit $n = 6$, so erhält man als Folge[42]

$$6 \xrightarrow{:2} 3 \xrightarrow{\cdot 3+1} 10 \xrightarrow{:2} 5 \xrightarrow{\cdot 3+1} 16 \xrightarrow{:2} 8 \xrightarrow{:2} 4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{:2} 1.$$

Beiden Vermutungen ist gemein, dass sie sich bereits mit Grundschulmathematik erklären lassen. Staunen setzt nun bei der Reflexion darüber ein, dass nicht nur komplexe Probleme wie die Riemannsche Vermutung, sondern auch gerade diese so einfach zu beschreibenden Probleme trotz aller Fortschritte in der Mathematik noch nicht gelöst werden konnten. Dieses Moment des Staunens wächst noch mit Bezug auf die Gödelschen Unvollständigkeitssätze, wenn die Goldbachsche und Collatzsche Vermutungen als solche herangezogen werden, welche vielleicht von der Mathematik mit all ihren elaborierten Werkzeugen nie gelöst werden können.

Die Relevanz solcher Überlegungen wird am Beispiel der Kontinuumshypothese besonders deutlich. Sie wurde 1878 von Cantor formuliert und trifft eine Aussage über die Mengen der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Zuvor konnte Cantor bereits beweisen, dass die Menge $\mathbb{R}$ mächtiger als die Menge $\mathbb{N}$ ist.[43] Die Kontinuumshypothese stellt nun die Behauptung auf, dass es keine Menge gibt, die einerseits ‚echt kleiner' als $\mathbb{R}$, andererseits ‚echt größer' als $\mathbb{N}$ ist – es gibt keine Menge ‚zwischen' den natürlichen und den reellen Zahlen.[44]

Bereits 1938 konnte Gödel zeigen, dass die Kontinuumshypothese nicht durch die Axiome der Mengenlehre[45] widerlegt werden kann. Wenn diese Axiome konsistent sind, so sind sie es auch unter Hinzunahme der Kontinuumshypothese. Später konnte jedoch Paul Cohen

---

[42] Die hier verwendete Notation lehnt sich an die graphentheoretische Darstellung der Collatzschen Vermutung an, in welcher zwei Zahlen n, m durch eine Kante verbunden werden, falls ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt: $n = 2 \cdot m$ oder $n = 3 \cdot m + 1$.

[43] Vergleiche Stillwell, John, *Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit. Eine mathematische Reise zu den vielseitigen Auswirkungen der Unendlichkeit,* Berlin u. Heidelberg, 2014, S. 6–10.

[44] Formal stellt die Kontinuumshypothese die Frage: Wenn die Kardinalität von $\mathbb{N}$ mit $\aleph_0$, die nächste Kardinalzahl mit $\aleph_1$ und die Kardinalität von $\mathbb{R}$ mit $\mathfrak{c}$ bezeichnet wird, gilt dann $\aleph_1 = \mathfrak{c}$? Für eine ausführliche Diskussion der Kontinuumshypothese vergleiche Cohen, Paul J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York, 2008.

[45] Vgl. Anm. 26.

beweisen, dass diese nicht aus den Axiomen der Mengenlehre hergeleitet werden kann. Insgesamt ist sie also unabhängig von diesen Axiomen, und sowohl die Annahme der Hypothese als auch die ihres Gegenteils ist zulässig. Sie ist somit ein Beispiel für den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Hierbei wird das Staunen in der Diskrepanz zwischen Wissen und Unwissen direkt offenbar. Denn die Resultate rund um die Kontinuumshypothese zeigen, dass das *tertium non datur*[46] der Mathematik aufgehoben ist. Die Hypothese lässt sowohl ihre eigene Annahme als auch ihr Gegenteil zu und eröffnet damit ein Spannungsfeld des Staunens.

IV. Die Renaissance des Hilbertprogramms

Seit Beginn des 21. Jh. herrscht in der Mathematik ein – sehr kontrovers diskutierter – Geist der Renaissance des Hilbertprogramms vor. Auch wenn die Mathematik, wie dort gefordert, nicht vom Staunen befreit werden kann, wird dennoch die Frage gestellt, wie weit das Programm trotz aller Einschränkungen durchführbar ist. Mit Hilfe von modernen Computern lassen sich schnell große Mengen an Beweisschritten untersuchen, sodass eine Liste von aus Axiomen abgeleiteten Theoremen automatisiert generiert werden kann.

Diese Renaissance wird vor allem durch sogenannte Automated Theorem Prover (ATP), sowie Interactive Theorem Prover (ITP) wie *Isabelle/HOL*[47] und *Coq*[48] getragen. Beide Maschinerien machen sich die Formalisierung von Logik zu Nutze. Diese geht in ihren Wurzeln auf Aristoteles zurück, wurde jedoch erst zum Ende des 19. und Anfang des 20. Jh. vollständig ausgeführt. Zentral sind hier zwei Schriften von Gottlob Frege mit einem kompletten Propositionskalkül und moderner Prädikatenlogik[49] sowie der Durchführung von Mathematik in formaler Logik[50]. Prinzipiell folgen ATPs und ITPs der Beschreibung Karl Poppers, wie ein Beweis ausgeführt werden soll:

There is only one way to make sure of the validity of a chain of logical reasoning. This is to put it in the form in which it is most easily testable: we break it up into many small steps, each

---

[46] Vgl. Anm. 15.

[47] Vgl. Nipkow, Tobias/Paulson, Lawrence C./Wenzel, Markus, *Isabelle/HOL A Proof Assistant for Higher-Order Logic*, Berlin, 2002.

[48] The *Coq* development team, *The Coq Proof Assistant Reference Manual*, LogiCalProject, http://coq.inria.fr, Version 8.6.1, 2017 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.2017].

[49] Frege, Gottlob, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle an der Saale, 1879.

[50] Frege, Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.

easy to check by anybody who has learnt the mathematical or logical technique of transforming sentences.[51]

Beginnend mit einer Menge von Axiomen und Schlussregeln werden letztere so lange auf erstere angewandt, bis das gewünschte Ergebnis erreicht ist. Im Falle von ATPs läuft dies automatisch, bei ITPs lässt sich der Prozess zusätzlich von Menschen leiten.
Welche Möglichkeiten ITPs haben, wurde eindrucksvoll von Christoph Benzmüller und Bruno W. Paleo gezeigt.[52] Ihnen gelang es, die formale Korrektheit des sogenannten ontologischen Gottesbeweises von Gödel[53] zu zeigen, indem sie diesen in *Isabelle* formalisierten. Sie zeigten damit, dass unter Annahme der Axiome, welche Gödel seinem Gottesbeweis zu Grunde gelegt hatte, alle seine Schlüsse richtig sind. Stimmt man also den Gödelschen Axiomen und Schlussregeln zu, so muss man zum gleichen Schluss kommen wie Gödel. Unabhängig vom semantischen Überschuss des Gottesbegriffes wird hier ein struktureller Nachteil der Methode von ITPs deutlich. Denn der ITP liefert keine neue Einsicht in die Vorgänge. Entsprechendes hatte bereits der französische Mathematiker Evariste Galois zukunftsweisend festgestellt:

Dès le commencement de ce siècle, l'algorithme avait atteint un degré de complication tel que tout progrès était devenu impossible par ce moyen, sans l'élégance que les géomètres modernes ont dû imprimer à leurs recherches et au moyen de laquelle l'esprit saisit promptement et d'un seul coup un grand nombre d'opérations.[54]

Ähnlich äußerte sich Alfred Pringsheim: „Der Mathematiker aber, der in jener wunderbar kondensierten Sprache [der Analysis, M.S.] zu denken versteht, ist vom mechanischen Rechner himmelweit verschieden."[55] Eine rein mechanische Überprüfung des Gödelschen Beweises lässt die Kreativität eines mathematischen Beweises vermissen. Es werden keine neuen Brücken zwischen vorher unzusammenhängenden Fachgebieten geschlagen, keine

---

[51] Popper 1968, S. 99.
[52] Benzmüller, Christoph/Wotzenlogel, Bruno, „Formalization, Mechanization and Automation of Gödel's Proof of God's Existence", https://arxiv.org/abs/1308.4526 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.17].
[53] Gödel, Kurt, „Ontological proof", in: *Unpublished Essays and Letters* (Collected Works 3), hg. v. Solomon Feferman u.a., New York, 1995.
[54] „Seit Beginn dieses Jahrhunderts hatte der Algorithmus einen Grad der Komplexität erreicht, dass jeder Fortschritt durch dieses Mittel [des Algorithmus, K.R.] ohne die Eleganz, welche die modernen Geometer ihren Forschungen einprägen mussten und mithilfe welcher der Geist sofort und mit einem Schlag eine große Anzahl an Rechenoperationen erfasst, unmöglich geworden war." (Übersetzung: Katarina Rempe), Galois, Évariste, *Manuscrits de Évariste Galois*, hg. v. Jules Tannery, Paris, 1908, S. 25.
[55] Pringsheim, Alfred, „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 13 (1904), S. 357–382, hier: S. 366.

neuen Theoreme generiert. Die formale Überprüfung ist für den Fortschritt in der Mathematik irrelevant.

Gerade in Bezug auf mathematische Beweise kann der Einsatz von Computern sogar den kreativen Kern der Beweise verdrängen. Entsprechend wird das bewundernswerte Moment des entfernt, welches den Beweisen inne war. Damit wird keine Gelegenheit zum Staunen mehr gegeben. Dies soll an zwei Beispielen verdeutlicht werden. Das erste Beispiel ist der Vierfarbensatz, welcher besagt, dass sich jede Landkarte in der euklidischen Ebene mit höchstens vier Farben derart einfärben lässt, dass keine zwei benachbarten Länder gleich gefärbt sind. Zwei Länder gelten hier als benachbart, wenn ihre gemeinsame Grenze mehr als nur einen Punkt umfasst.[56] Dieser Umstand wurde bereits 1852 von Francis Guthrie als Vermutung aufgestellt,[57] welche jedoch lange nicht lückenlos bewiesen werden konnte. Zunächst wurden einige fehlerhafte Beweise vorgelegt, bis Kenneth Appel und Wolfgang Haken schließlich einen Beweis vorstellten, welcher mit extensiver Hilfe durch Computer durchgeführt werden konnte. Sie zerlegten das Problem in 1.936 unterschiedliche Fälle, die im Anschluss durch ein Computerprogramm überprüft wurden.[58] Dieser Beweis gilt als einer der ersten, der nicht vollständig von Menschen nachvollzogen wurde. Theoretisch könnte zwar jeder einzelne der Fälle von einem Mathematiker per Hand überprüft werden, jedoch käme diese Überprüfung einer Lebensaufgabe gleich und würde somit im Sinne Poppers keine Überzeugungskraft besitzen.[59]

Entsprechend wurde der Beweis von Appel und Haken nach seiner Vorstellung kontrovers diskutiert und teilweise sogar abgelehnt.[60] Um alle Zweifel zu zerstreuen, wurde der Beweis 2005 in *Coq* formalisiert,[61] wobei der ITP das für den Beweis genutzte Computerprogramm als korrekt verifiziert hat. Das heißt, ein Computersystem (*Coq*) verifiziert die Ergebnisse eines anderen (das Programm von Appel und Haken), während der Mensch von diesem Prozess ausgeschlossen wird und bleibt. Die Vertrauenslast verschiebt sich von einem Computerprogramm auf das andere. Es gilt hier genau wie bei obiger formaler Überprüfung des Gödelschen Gottesbeweises durch *Isabelle*, dass durch die Überprüfung keine neue Idee

---

[56] Streng genommen sind die Länder benachbart, wenn die Grenze aus mehr als einer Nullmenge besteht.

[57] Vgl. Fritsch, Rudolf/Fritsch, Gerda, *Der Vierfarbensatz. Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee,* Mannheim u.a., 1994, S. 7–10.

[58] Vgl. R. Fritsch/G. Fritsch 1994, S. 170–171.

[59] „Nobody would dream of justifying the validity of a logical inference, […] by writing […] ‚In checking this chain of inferences […] I experienced an acute feeling of conviction.'" (Popper 1968, S. 98); vgl. auch Anm. 27.

[60] Für eine umfassende Diskussion des Beweises und seiner Rezeption im allgemeinen Kontext computergeführter Beweise vgl. MacKenzie, Donald A., *Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust*, Cambridge, 2001.

[61] Vgl. Gonthier, Georges, „Formal Proof – The Four-Color Theorem", in *Notices of the AMS*, 55/11, 2008, S. 1382–1393.

generiert wurde. Vielmehr wurde hier eine altbekannte – sehr aufwändig umzusetzende – Beweisidee ausgeführt.
Als zweites Beispiel für die Verdrängung des Staunens aus einem mathematischen Beweis soll das Pythagorean Triple Theorem dienen. Ein pythagoreisches Tripel besteht aus drei natürlichen Zahlen (a, b, c), sodass $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Man stellt sich die folgende Frage: Gegeben seien alle Zahlen von 1 bis zu einer natürlichen Zahl n. Lässt sich jeder dieser Zahlen jeweils eine von zwei Farben (rot oder blau) zuordnen, sodass weder unter den roten Zahlen noch unter den blauen Zahlen drei sind, die ein pythagoreisches Tripel bilden? Beispielsweise gilt für $n = 5$, dass die Zahlen wie folgt aufgeteilt werden können: rot = {1,2,3,4}, $blau = \{5\}$. Färbt man die 5 auch rot, so sind $3, 4, 5$ rot und damit liegt das Tripel $(3, 4, 5)$ in der gleichen Menge. Ein Resultat von Marijn Heule, Oliver Kullmann und Victor Marek[62] besagt nun, dass eine Färbung bis zu $n = 7.824$ in rot und blau so möglich ist, dass weder aus drei roten noch aus drei blauen Zahlen ein pythagoreisches Tripel gefunden werden kann. Bemerkenswerterweise ist dies für $n = 7.825$ nicht mehr der Fall. Es ist egal, wie man die 7.825 Zahlen auf die zwei Farben aufteilt: In jedem Fall lässt sich ein pythagoreisches Tripel in mindestens einer der beiden Farben finden.
Der Verwunderung über diese recht arbiträre Zahl 7.825 wohnt nun das Potential des Staunens inne. Das Unwissen darum, wieso gerade diese Zahl eine Grenze für das Theorem darstellt, öffnet Raum für das Staunen. Dieser Raum wird jedoch umgehend von Heule, Kullmann und Marek gefüllt. In einem 200 Terabyte[63] umfassenden Beweis probieren sie schlicht alle $1{,}8 \cdot 10^{2355}$ möglichen Aufteilungen in rote und blaue Zahlen aus und kommen zu dem Ergebnis, dass keine dieser Aufteilungen frei von pythagoreischen Tripeln ist.
In beiden Beispielen wird deutlich, wie Staunen recht rabiat durch den Einsatz von Computern aus der Domäne der Mathematik verdrängt wird. Zunächst ermöglicht das Unwissen um die Korrektheit der Aussagen, danach das Spannungsfeld zwischen Komplexität und Trivialität der Beweise ein Staunen. Doch wird dieses Staunen einerseits durch die finale Beantwortung der Fragen, andererseits durch die Trivialität der Antworten verdrängt. Auch ein Staunen über die Kreativität der Beweise ist nicht mehr möglich. Während der Beweis der Fermatschen Vermutung von Wiles mehrere, bis dato unzusammenhängende Bereiche der Mathematik zusammengebracht und somit neue Techniken und Forschungsfelder eröffnet hat, bleiben Computerbeweise hinter diesem Anspruch zurück. Sie bestehen schlicht aus riesigen

[62] Heule, Marijn J. H./Kullmann, Oliver/Marek, Victor W., „Solving and Verifying the Boolean Pythagorean Triples Problem via Cube-and-Conquer“, https://arxiv.org/abs/1605.00723 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.2017].
[63] Zur Einordnung des Umfangs: Würde man die Beweisdaten auf DVDs brennen, so wären 42.553 DVDs notwendig, den Beweis zu fassen.

Mengen an trivialen Schlüssen, die ob ihres Umfangs nicht per Hand geprüft werden können, die aber auch nach ihrer Überprüfung durch die Computer keinerlei neue Einsicht liefern. Bezogen auf Computerbeweise wird das Staunen in der Mathematik somit vollkommen eliminiert.

Bibliographie

Albers, Donald J./Alexanderson, Gerald L. (Hg.), *Mathematical People. Profiles and Interviews*, 2. Aufl., Wellesley, 2008.

Bellmann, Richard Ernest, *Eye of the Hurricane. An Autobiography*, Hackensack, 1984.

Benzmüller, Christoph/Wotzenlogel, Bruno, „Formalization, Mechanization and Automation of Gödel's Proof of God's Existence", https://arxiv.org/abs/1308.4526 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.2017].

Birkhoff, David George, „Intuition, Reason and Faith in Science [1938]", in: *Musings of the Masters. An Anthology of Mathematical Reflections*, hg. v. Raymond Ayoub, Washington DC, 2004, S. 98–114.

du Bois-Reymond, Emil Heinrich, *Über die Grenzen des Naturerkennens. Die sieben Welträthsel*, Leipzig, 1872.

Borwein, Peter/Liljedahl, Peter/ Zhai, Helen (Hg.): *Mathematicians on Creativity*, Washington, 2014.

Cantor, Georg, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", in: *Mathematische Annalen*, 49/2 (1897), S. 207–246.

Cohen, Paul J., *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, New York, 2008.

Derbyshire, John, *Prime Obsession. Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics*, Washington D.C., 2003.

Diophant, *Diophanti Alexandrini arithmeticorum*, Bd. 2, hg. u. übers. v. Samuel de Fermat, Toulouse, 1670.

Doxiadis, Apostolos, *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture*, London, 2001.

Euklid, *Die Elemente*, hg. v. Clemens Thaer, Darmstadt, 1962.

Fritsch, Rudolf/Fritsch, Gerda, *Der Vierfarbensatz. Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee*, Mannheim u.a., 1994.

von Fritz, Kurt, „The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum", in: *The Annals of Mathematics*, 46/2 (1945), S. 242–264.

Fourier, Joseph, *The Analytical Theory of Heat*, Cambridge, 1878.

Franzén, Torkel, *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Natick, MA, 2005.

Frege, Gottlob, *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle an der Saale, 1879.

Frege, Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau, 1884.

Galois, Évariste, *Manuscrits de Évariste Galois*, hg. v. Jules Tannery, Paris, 1908.

Gödel, Kurt, „Ontological proof“, in: *Unpublished Essays and Letters* (Collected Works 3), hg. v. Solomon Feferman u.a., New York u. Oxford, 1995.

Gonthier, Georges, „Formal Proof – The Four-Color Theorem“, in: *Notices of the AMS*, 55/11 (2008), S. 1382–1393.

Hadamard, Jacques, *The Mathematician's Mind. The Psychology of Invention in the Mathematical Field*, Princeton, 1945.

Hardy, Godfrey Harold, *A Mathematician's Apology*, Cambridge, 1940.

Hasse, Helmut/Scholz, Heinrich: *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Charlottenburg, 1928.

Heintz, Bettina, *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Wien, 2000.

Heule, Marijn J. H./Kullmann, Oliver/Marek, Victor W., „Solving and Verifying the Boolean Pythagorean Triples Problem via Cube-and-Conquer“, https://arxiv.org/abs/1605.00723 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.2017].

Hilbert, David, „Die Grundlagen der Mathematik“, in: *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität* 6 (1928), S. 65–85.

Hilbert, David, „Naturerkennen und Logik“, in: *Die Naturwissenschaften*, 18 (1930), S. 959–963.

Hilbert, David, „Über das Unendliche“, in: *Mathematische Annalen*, 95 (1926), S. 161–190.

Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach – ein endlos geflochtenes Band*, 4. Aufl., München, 1995.

Jackson Keyser, Cassius, „The Universe and Beyond“, in: *Hibbert Journal*, 3 (1904/1905), S. 300–314.

MacKenzie, Donald A., *Mechanizing Proof. Computing, Risk, and Trust*, Cambridge, 2001.

Nipkow, Tobias/Paulson, Lawrence C./Wenzel, Markus, *Isabelle/HOL A Proof Assistant for Higher-Order Logic*, Berlin, 2002.

Pickover, Clifford A., *Das Mathebuch. Von Pythagoras bis in die 57. Dimension. 250 Meilensteine in der Geschichte der Mathematik*, Kerkdriel, 2013.

Fermat, Pierre de, *Bemerkungen zu Diophant*, aus dem Lateinischen übers. u. hg. v. Max Miller, Leipzig, 1932.

Fermat, Pierre de, *Œuvres de Fermat*, Bd. 1, hg. v. Paul Tannery u. Charles Henry, Paris, 1891.

Popper, Karl, *The Logic of Scientific Discovery,* New York, Hagerstown, San Francisco, London, 1968.

Pringsheim, Alfred, „Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik“, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 13 (1904), S. 357–382.

Rautenberger, Wolfgang, *Einführung in die Mathematische Logik. Ein Lehrbuch,* Wiesbaden, 2008.

Russell, Bertrand, „The Philosophy of Logical Atomism [1918]“, in: *The Philosophy of Logical Atomism and Other Essays 1914–19* (The Collected Papers of Bertrand Russell 8), hg. v. John Slater, London, 1986, S. 157–244.

du Sautoy, Marcus, *Die Musik der Primzahlen. Auf den Spuren des größten Rätsels der Mathematik*, München, 2006.

Singh, Simon, *Fermats letzter Satz. Die abenteuerliche Geschichte eines mathematischen Rätsels*, München, 2011.

Stillwell, John, *Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit. Eine mathematische Reise zu den vielseitigen Auswirkungen der Unendlichkeit*, Berlin und Heidelberg, 2014.

Tapp, Christian, *An den Grenzen des Endlichen. Das Hilbertprogramm im Kontext von Formalismus und Finitismus*, Berlin u. Heidelberg, 2013.

The *Coq* development team, *The Coq Proof Assistant Reference Manual*, LogiCalProject, http://coq.inria.fr, Version 8.6.1, 2017 [zuletzt aufgerufen am: 06.09.2017].

Waltershausen, Wolfgang Sartorius von, *Gauss zum Gedächtniss*, Leipzig, 1856.

Weyl, Hermann, „Part II. Topology and Abstract Algebra as Two Roads of Mathematical Comprehension“, in: *The American Mathematical Monthly*, 102/7 (1995), S. 646–651.

Wußing, Hans, *6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise,* Bd. 2, Berlin, 2009.